Inéquations : Résumé de cours et méthodes

1 Principe général

Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant l'inégalité donnée. L'ensemble des solutions S se présente en général sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Pour déterminer si les bornes de S sont ouvertes ou fermées on applique la régle suivante :
Les bornes sont ouvertes si l'inégalité formant l'inéquation est stricte, si la borne correspond à un infini ou à une double barre.
Dans tous les autres cas, les bornes sont fermées.

2 Rappel sur les inégalités

Si on multiplie (ou on divise) une inégalité par un nombre strictement négatif, on change le sens de cette inégalité.
Exemple : Résolution de $3-2x>4$
$3-2x>4 \Leftrightarrow -2x>4-3 \Leftrightarrow -2x>1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$. Donc, $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$
Les bornes sont ouvertes car l'inégalité est stricte.

3 Signe de $ax+b$

Pour $a\neq 0$, on applique la règle suivante :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de ax+b		*signe de* $(-a)$	0	*signe de a*	

Cette règle peut se résumer par la phrase suivante : «signe de a après le 0».

Exemple : Etude du signe de $-2x+3$
• On cherche la valeur qui annule $-2x+3$: $-2x+3=0 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$.
• On complète le tableau en utilisant la règle : «signe de $a=-2$ après le 0»

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$		+	0	−	

$\uparrow$
signe de -2

4 Inéquations sans inconnue au dénominateur nécessitant un tableau de signes

Méthode générale :
- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre dans le dernière ligne.
- Ecrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Exemple : Résolution de l'inéquation $x^2 \geqslant (2x-1)^2$
• on se raméne à 0 : $x^2-(2x-1)^2 \geqslant 0$
• on factorise (on reconnaît la forme a^2-b^2) : $[x-(2x-1)]\times[x+(2x-1)] \geqslant 0 \Leftrightarrow (-x+1)(3x-1) \geqslant 0$
• on construit et on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
$-x+1$		+		+	0	−	
$3x-1$		−	0	+		+	
$(-x+1)(3x-1)$		−	0	+	0	−	

Explications :
$-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$. Signe de $a=-1$ après le 0.
$3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Signe de $a=3$ après le 0.
On applique la règle des signes pour la dernière ligne.
On écrit S en cherchant quelles sont les valeurs de x dans la première ligne pour lesquelles on obtient un signe + dans la dernière ligne puisque l'inéquation se ramène à $(-x+1)(3x-1) \geqslant 0$.
On obtient $S=\left[\frac{1}{3};1\right]$. (les bornes sont fermées car l'inégalité n'est pas stricte et qu'elles ne correspondent pas à des infinis)

5 Inéquations avec l'inconnue au dénominateur nécessitant un tableau de signes

Méthode générale :
- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Réduire le premier membre sous le même dénominateur
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre dans le dernière ligne. **Attention :** il faut ajouter une **double barre** dans la dernière ligne pour toutes les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
- Ecrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Exemple : Résolution de l'inéquation $\frac{1-x}{x} \leqslant 2$

• on se ramène à 0 : $\frac{1-x}{x}-2 \leqslant 0$

• on réduit le premier membre au même dénominateur : $\frac{1-x}{x}-\frac{2x}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} \leqslant 0$

• on construit et on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$1/3$		$+\infty$
$1-3x$		+		+	0	−	
x		−	0	+		+	
$\frac{1-3x}{x}$		−	‖	+	0	−	

Explications :
$1-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Signe de $a=-3$ après le 0.
x est évidemment positif après 0 et négatif avant.
On applique la règle des signes pour la dernière ligne en n'oubliant pas d'ajouter une double barre en 0 car le dénominateur s'annule pour $x=0$.
On écrit S en cherchant quelles sont les valeurs de x dans la première ligne pour lesquelles on obtient un signe - dans la dernière ligne puisque l'inéquation se ramène à $\frac{1-3x}{x} \leqslant 0$. On obtient $S=\left]-\infty;0\right[\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.
Les bornes sont ouvertes aux infinis et en 0 (à cause de la double barre). La borne qui reste est fermée car l'inégalité n'est pas stricte.