

Chapitre 1

Pourcentages

Classe de première ES / L

Pourcentages

I. Rappels - proportion et pourcentage.....	2
1) Proportion.....	2
2) Pourcentage.....	2
II. Pourcentage d'évolution.....	3
1) Taux d'évolution à partir d'un pourcentage. Coefficient multiplicateur.....	3
2) Taux d'évolution en pourcentage à partir d'une évolution.....	4
III. Évolutions successives.....	4
IV. Évolution réciproque.....	5
V. Évolutions et indices.....	6
VI. Résumé.....	7

Livre 1 (L1)	Hachette – Déclic 2011
Livre 2 (L2)	Hatier – Odysée 2011

I. Rappels - proportion et pourcentage

1) Proportion

Définition :

Soit E un ensemble fini et A une partie de l'ensemble E . n_E est le nombre d'éléments de E et n_A le nombre d'éléments de A . La proportion ou la fréquence d'éléments de A dans E est :

$$p = \frac{\text{nbre d'éléments de } A}{\text{nbre d'éléments de } E} = \frac{n_A}{n_E}$$

- p est un nombre compris entre 0 et 1.
- On exprime souvent p en pourcentage par exemple : si $p = 0,65$ alors $p = \frac{65}{100}$ soit 65% .
- La relation $p = \frac{n_A}{n_E}$ permet, connaissant deux des trois nombres, de calculer le troisième.

Exemple

Une classe de 30 élèves contient 21 filles. Quelle est la proportion de fille dans cette classe ? Exprimer ensuite ce résultat sous forme de pourcentage.

$$n_E = 30 \qquad n_A = 21$$

$$\text{La proportion de filles dans la classe est } p = \frac{21}{30} = 0,7 = \frac{70}{100}.$$

Dans cette classe, 70% des élèves sont des filles.

Remarque : Nous sommes dans une situation de proportionnalité, que l'on peut représenter dans un tableau (produit en croix)

p (en %)	21
100 (%)	30

2) Pourcentage

Calculer t % d'un nombre N , c'est multiplier N par $\frac{t}{100}$.

Exemple

Dans une classe de 30 élèves, 70% sont demi-pensionnaires.
Quel est le nombre d'élèves demi-pensionnaires ?

$$30 \times \frac{70}{100} = 21, 21 \text{ élèves sont demi-pensionnaires.}$$

Remarque : pourcentage de pourcentage

Calculer t_2 % de t_1 % d'un nombre N , c'est multiplier N par $\frac{t_2}{100} \times \frac{t_1}{100}$.

II. Pourcentage d'évolution

Feuille : act. 1 et 2

1) Taux d'évolution à partir d'un pourcentage. Coefficient multiplicateur.

Propriété :

Pour augmenter une valeur de t % il faut la multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$

Pour diminuer une valeur de t % il faut la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

Les nombres $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ sont appelés **coefficients multiplicateurs**.

Si le CM est supérieur à 1 il s'agit d'une hausse, s'il est inférieur à 1 il s'agit d'une baisse

Démonstration :

Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une augmentation de t %.

$$V_1 = V_0 + V_0 \times \frac{t}{100} = V_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une diminution de t %.

$$V_1 = V_0 - V_0 \times \frac{t}{100} = V_0 \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

Feuille : 3-7
L1 : 19-20 p20

Exemples :

1) Un article coûtait 25€ en 2013, il subit une augmentation de 12 %, quel est son prix après l'augmentation?

$$25 \times \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 25 \times 1,12 = 28. \text{ Son prix après augmentation est de 28€.}$$

2) Un article coûtait 35€ en 2010. L'année suivante son prix diminue de 8%. Quel est son prix après cette réduction ?

$$35 \times \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 35 \times 0,92 = 32,2. \text{ Son prix après réduction est de 32,20€}$$

3) Compléter le tableau suivant :

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
Augmentation de 27 %	
Diminution de 14,7 %	
	1,73
	0,38
	3,5

Remarques :

- Un CM n'a pas d'unité.

- Un pourcentage d'augmentation supérieur ou égal à 100 % peut aussi s'exprimer à l'aide d'un coefficient multiplicateur : +200 % correspond à un $CM = 1 + \frac{200}{100} = 3$.

2) Taux d'évolution en pourcentage à partir d'une évolution

Feuille : 8
L1 : 21-22 p20

Une grandeur évolue d'une valeur initiale V_0 à une valeur finale V_1 .

Le **taux d'évolution** de cette grandeur est égal à : $\frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

En pourcentage le taux d'évolution est $t\%$ avec $t = 100 \times \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

Attention au signe de t :

Si t est supérieur à 0 alors la grandeur est en hausse, s'il est inférieur à 0 alors cette grandeur est en baisse.

Exemples :

1) Le salaire d'un employé est augmenté en passant de 1540 € à 1848 €. Quel est le taux d'évolution de ce salaire ?

$V_0 = 1540$ et $V_1 = 1848$

$t = 100 \times \left(\frac{1848 - 1540}{1540} \right) = 20$. Le taux d'évolution de ce salaire est de 20 %.

2) Le stock d'une entreprise subit une baisse de 270 kg à 207 kg. Quel est le pourcentage de baisse du stock de cette entreprise ?

$V_0 = 270$ et $V_1 = 207$

$t = 100 \times \left(\frac{207 - 270}{270} \right) \approx -23,3$. Le stock a baissé de 23,3 %.

L1 : 31 p21, 33-34 p22

Propriété :

Le coefficient multiplicateur CM correspond à un taux d'évolution t . Alors :

$$t = (CM - 1) \times 100$$

Connaissant la valeur initiale V_0 et la valeur finale V_1 d'une grandeur, on a :

$$CM = \frac{V_1}{V_0}$$

III. Évolutions successives

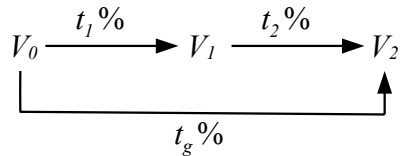
Propriété :

Lors de plusieurs évolutions successives les **coefficients multiplicateurs** se multiplient.

On obtient alors le coefficient multiplicateur C_g et le taux d'évolution t_g équivalent ou **global**.

Démonstration :

Si une grandeur évolue d'une valeur initiale V_0 à une valeur V_1 dont le taux d'évolution est t_1 , puis d'une valeur V_1 à une valeur V_2 dont le taux d'évolution est t_2 (t_1 et t_2 peuvent être positifs, dans le cas d'une augmentation, ou négatifs dans le cas d'une diminution).



Feuille : 9-12
L1 : 24 p20, 38 40 p23, 45p24

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) V_0 = CM_1 \times V_0 \\ V_2 &= \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) V_1 = CM_2 \times V_1 \end{aligned} \right\} V_2 = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right) V_0 = CM_1 \times CM_2 \times V_0$$

Exemples :

1) Une action cotée en bourse augmente successivement deux jours consécutifs : le premier jour de 5% et le deuxième de 8%. Quel est le coefficient multiplicateur global ? Quel est le pourcentage d'augmentation globale en deux jours ?

$$V_2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \left(1 + \frac{8}{100}\right) V_0 = 1,05 \times 1,08 \times V_0 = 1,134 \times V_0$$

Le coefficient multiplicateur global est $CM_g = 1,134$.

$$t_g = (CM_g - 1) \times 100 = (1,134 - 1) \times 100 = 13,4$$

Le taux d'évolution global est de +13,4 %

2) Le prix du baril du pétrole a baissé de 15% puis a augmenté de 9% le mois suivant. Quel est le coefficient multiplicateur global? Déterminer en pourcentage l'évolution globale du prix du baril durant ces deux derniers mois ?

$$V_2 = \left(1 - \frac{15}{100}\right) \times \left(1 + \frac{9}{100}\right) V_0 = 0,85 \times 1,09 \times V_0 = 0,9265 \times V_0$$

Le coefficient multiplicateur global est $CM_g = 0,9265$.

$$t_g = (1 - CM_g) \times 100 = (1 - 0,9265) \times 100 = 7,35$$

Le prix du baril de pétrole a baissé en deux mois de 7,35 %.

IV. Evolution réciproque

Définition :

Une grandeur évolue d'une valeur initiale V_0 à une valeur finale V_1 .

L'évolution réciproque de cette grandeur est l'évolution de la valeur V_1 à une valeur finale V_0 .

Propriété :

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque d'une grandeur est l'inverse du coefficient multiplicateur de cette grandeur.

Si t est le taux d'évolution de cette grandeur alors le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CM_r = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{100}{100 + t}$$

Démonstration :

Soit t un pourcentage d'évolution positif ou négatif.

Soit la valeur initiale d'une grandeur et la valeur de cette grandeur obtenue après une évolution de t %.

$$\text{On a } V_1 = V_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) \text{ et donc } V_0 = \frac{V_1}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)} = \frac{V_1}{\left(\frac{100+t}{100}\right)} = V_1 \times \left(\frac{100}{100+t}\right)$$

L'évolution réciproque a donc pour coefficient multiplicateur : $\frac{100}{100+t}$.

Exemple :

Feuille : 13-14
L1 : 44 p24

1) Le prix du baril de pétrole a augmenté de 17 %.

Quel est le taux d'évolution qu'il faudrait appliquer pour que le prix du baril de pétrole retrouve son prix initial ?

Il s'agit de calculer le taux d'évolution réciproque dont le taux est 17 %.

Le coefficient multiplicateur inverse est : $CM_r = \frac{100}{100+17} \simeq 0,8547$.

Soit un taux d'évolution de $t_r = (1 - 0,8547) \times 100 = 14,53$.

Pour que le prix du baril de pétrole revienne à son cours initial il faudrait qu'il subisse une baisse d'environ 14,53 %.

V. Évolutions et indices

Exemple : Prenons l'évolution du SMIC horaire brut de 2000 à 2010 :

Feuille : 22-24
L1 : 42 p23

Année	2000	2005	2010	2012
SMIC horaire en €	6,41	8,03	8,86	9,40
indice				

On choisit une année de référence et on lui affecte l'indice 100.

Année	2000	2005	2010	2012
SMIC horaire en €	6,41	8,03	8,86	9,40
indice	100			

Les indices correspondants aux autres années sont ensuite calculés de telle sorte que les proportions soient respectées :

$$\text{pour 2005 : } \frac{8,03 \times 100}{6,41} \simeq 125, \text{ pour 2010 : } \frac{8,86 \times 100}{6,41} \simeq 138, \text{ pour 2012 : } \frac{9,4 \times 100}{6,41} \simeq 147.$$

Année	2000	2005	2010	2012
SMIC horaire en €	6,41	8,03	8,86	9,40
indice	100	125	138	147

VI. Résumé

- **Coefficients multiplicateurs** : hausse $CM = 1 + \frac{|t|}{100}$, baisse $CM = 1 - \frac{|t|}{100}$.
- **Taux d'évolution** en pourcentage : $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \times 100$.
- $t = (CM - 1) \times 100$.
- $CM = \frac{V_1}{V_0}$
- Lors de plusieurs évolutions successives les **coefficients multiplicateurs se multiplient**.
- Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque d'une grandeur **est l'inverse** du coefficient multiplicateur de cette grandeur : $CM_r = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{100}{100+t}$
- Indice : $I_1 = \frac{V_1}{V_0} \times 100$ (indice base 100 pour V_0).

Feuille : 15-21, 25-26
L1 : 55-56 p 27, QCM p19