Second degré

Classe de première S et ES/L.

Second degré

Livre 1 (L1)	

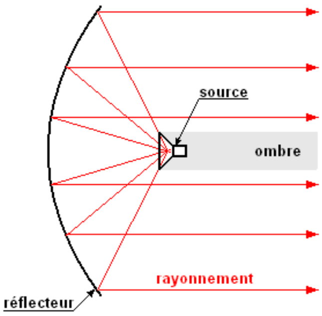
Introduction

Le second degré est présent partout ou presque...

On trouve cette forme parabolique en architecture ou en balistique comme le montrent les exemples suivants :

Saint-Louis Abbey, aux formes paraboliques se trouve à Crève-Coeur dans le Missouri.

On trouve aussi la présence du second degré dans le lancer des projectiles dans un champ de gravitation tel que celui de la Terre. Le ballon, lancé en l'air et sans effet suit une trajectoire parabolique parfaite. Il en est de même pour le boulet de canon.



Les paraboles1 utilisées pour recevoir la télévision par satellite ne sont pas nommées ainsi par hasard. La forme parabolique (on parle de paraboloïde) permet de concentrer le signal sur le récepteur situé au foyer. C'est une caractéristique géométrique de cette courbe.

Nous allons maintenant nous diriger vers l'étude théorique des paraboles et des expressions du second degré qui leur sont associées.

Séquence 1

L1 : activité 1p48

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients *a*, *b* et *c* sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$
- $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$
- $h(x) = 4 - x^2$
- $k(x) = (x-4)(x+3)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Théorème 1 : Toute fonction *f* polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels. On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de *f*.

Démonstration :

Puisque $a \neq 0$, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$. Entre parenthèses, on reconnaît le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

On en déduit que $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

Il en résulte que $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Exemples :

$f(x) = 3(x+1)^2 + 7$ $\qquad$ $a = 3$; $\alpha = -1$; $\beta = 7$

$g(x) = -2(x+5)^2 - 4$ $\qquad$ $a = -2$; $\alpha = -5$; $\beta = -4$

$h(x) = \frac{3}{2}(x-3)^2 + \frac{7}{3}$ $\qquad$ $a = \frac{3}{2}$; $\alpha = 3$; $\beta = \frac{7}{3}$

Méthode : Démontrer qu'une expression est la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

1) Démontrer que $f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de *f*.

Méthode 1 :

$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$
$f(x) = 2(x^2 - 10x) + 10$
$f(x) = 2(x-5)^2 - 50 + 10$
$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$

Méthode 2 :

$2(x-5)^2 - 40$
$= 2(x^2 - 10x + 25) - 40$
$= 2x^2 - 20x + 50 - 40$
$= 2x^2 - 20x + 10$
$= f(x)$

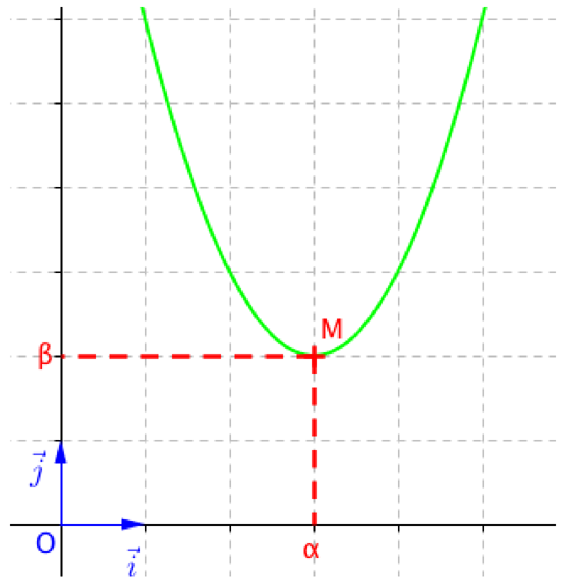
III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction *f* donnée sous sa forme canonique par : $f(x)=2(x-1)^2+3$
Alors : $f(x)\geqslant 3$ car $2(x-1)^2$ est positif.
Or $f(1)=3$ donc pour tout *x*, $f(x)\geqslant f(1)$.
f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété : Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a\neq 0$.
- Si $a>0$, *f* admet un minimum pour $x=\alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a<0$, *f* admet un maximum pour $x=\alpha$. Ce maximum est égal à β.

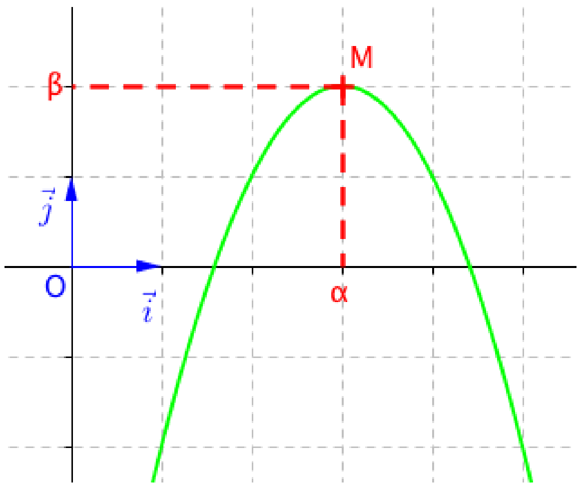
1) Si a > 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$



2) Si a < 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$



Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est **une parabole**.
M est le sommet de la parabole. Il correspond au maximum ou au minimum de la fonction *f*.
La parabole possède un axe de symétrie. Il s'agit de la droite (verticale) d'équation $x = \alpha$.

Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

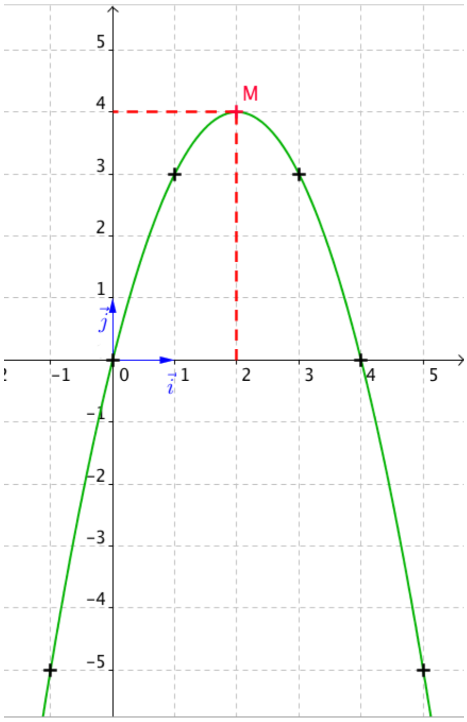
Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$.
1) Démontrer que $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ est la forme canonique de *f*.
2) Représenter graphiquement la fonction *f*.

1)

$$-(x-2)^2 + 4$$
$$= -(x^2 - 4x + 4) + 4$$
$$= -x^2 + 4x$$
$$= f(x)$$

2)
On a donc $f(x) = -(x-2)^2 + 4$.
f admet donc une maximum pour $x = 2$.
Ce maximum est égal à égal à 4 :
$f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$
Les variations de *f* sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	4	↘



Séquence 2

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. .
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $2x^2 + 3x - 1 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Exemple :
Le discriminant de l'équation $2x^2 + 3x - 1 = 0$ est 17 :
$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 + 8 = 17$ (a = 2, b = 3 et c = -1).

Théorème 2 : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
Si $\Delta = 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
Si $\Delta > 0$: l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration :

Reprenons la forme canonique de la démonstration du **théorème 1** :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Si Δ < 0, alors $\frac{-\Delta}{4a^2}$ est strictement positif. Il en est de même pour l'expression entre crochets.
$f(x)$ Est le produit de deux facteurs non nuls. L'équation $f(x)=0$ n'a donc pas de solution.

Si Δ = 0, alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Ainsi puisque $a \neq 0$, $f(x)=0$ équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$. L'équation a donc une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si Δ > 0, alors $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$.
L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Méthode : Résoudre une équation du second degré.

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x^2 - x - 6 = 0$ **2)** $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$ **3)** $x^2 + 3x + 10 = 0$

1) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times2\times(-6) = 1 + 48 = 49$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2} = -\frac{3}{2} \qquad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2} = 2$$

Donc les solutions de cette équation sont : $S = \left\{\dfrac{-3}{2} ; 2\right\}$

2) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times2\times(\dfrac{9}{8}) = 9 - 9 = 0$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-3)}{2\times2} = \dfrac{3}{4}$ $\qquad S = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

3) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times1\times10 = -31$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle. $S = \varnothing$

II. Factorisation d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si $\Delta = 0$: pour tout réel x on a $f(x) = a(x - x_0)^2$
Si $\Delta > 0$: pour tout réel x on a $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- propriété admise -

Remarque : Si $\Delta < 0$, on n'a pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Factoriser les trinômes suivants :

1) $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$ **2)** $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$

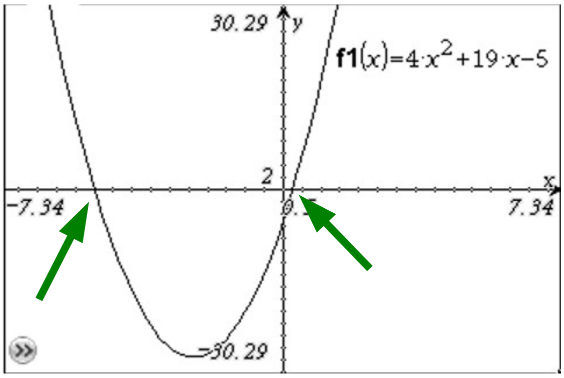
1) On cherche les racines du trinôme $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-19 - \sqrt{441}}{2\times4} = -5$ $\quad x_2 = \dfrac{-19 + \sqrt{441}}{2\times4} = \dfrac{1}{4}$

On a donc :

$$f(x) = 4x^2 + 19x - 5 = 4\left(x-(-5)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) = (x+5)(4x-1)$$



Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile ! On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

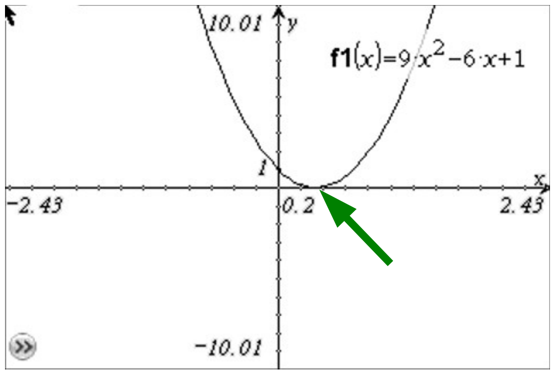
2) On cherche les racines du trinôme $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine (double) est : $x_0 = \dfrac{-(-6)}{2\times9} = \dfrac{1}{3}$

On a donc :

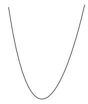
$$g(x) = 9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 = (3x-1)^2$$



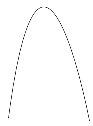
III. Signe d'un trinôme

Remarque préliminaire :
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

si a > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut :



si a < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas :

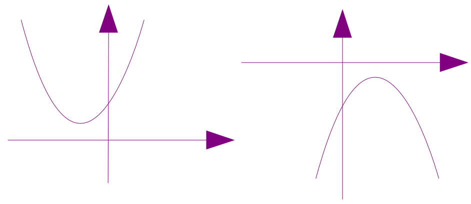


Théorème 3 : Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si Δ < 0 :

a > 0   a < 0

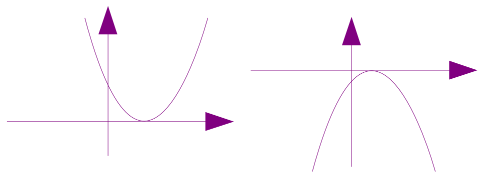
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	



L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution donc la courbe de *f* ne traverse pas l'axe des abscisses.

Si Δ = 0 :

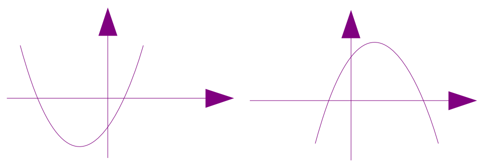
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a



L'équation $f(x)=0$ a une solution unique donc la courbe de *f* a son extremum sur l'axe des abscisses.

Si Δ > 0 :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe a	0	Signe -a	0	Signe a



L'équation $f(x)=0$ a deux solutions donc la courbe de *f* traverse l'axe des abscisses en deux points.

Démonstration :

On démontre facilement ce théorème en utilisant la forme $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ pour Δ<0 et Δ=0

et la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour Δ > 0.

Méthode : Résoudre une inéquation

Résoudre l'inéquation suivante : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier le signe du trinôme.

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ Équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ $\qquad$ $x_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

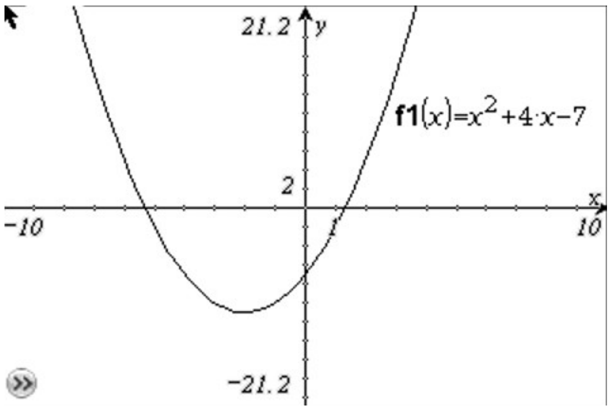
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc :

$S = \left[-2-\sqrt{11} ; -2+\sqrt{11}\right]$

Vérification : *On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.*



Un logiciel de calcul formel permet également de contrôler le résultat :

$\text{solve}\left(x^2+3\cdot x-5<-x+2, x\right)$

$-\left(\sqrt{11}+2\right)<x<\sqrt{11}-2$

IV. "Exercices types" second degré

Équations bicarrées...

On se propose de résoudre l'équation (E) :

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0.$$

1. Vérifiez qu'en posant $t = x^2$, l'équation (E) devient :

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

2. Résolvez l'équation $t^2 - 6t + 8 = 0$.

3. Déduisez-en que l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ admet quatre solutions, puis calculez-les.

Coûts, recettes et bénéfices…

Une entreprise produit des appareils photographiques jetables d'un certain prix.

1. Les coûts, en euros, liés à cette fabrication dépendent de la quantité q d'appareils fabriqués. Ils s'expriment par la relation :

$$C(q) = 0{,}2q^2 - 6q + 50.$$

a) Calculez le montant des coûts pour une production de 20 appareils.

b) Calculez le nombre d'appareils fabriqués correspondant à un coût d'un montant de 250 €.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [20 ; 60] par :

$$f(x) = 0{,}2x^2 - 6x + 50.$$

Construisez dans un repère la courbe représentative de la fonction f.

3. Le prix de vente unitaire de ces appareils photographiques jetables est égal à 6 €.

a) Exprimez, en fonction du nombre q d'appareils vendus, le prix de vente total V(q) de q appareils.

b) Calculez V(20) et V(60).

c) Tracez dans le repère de la question 2 la droite représentant la fonction g définie sur l'intervalle [20 ; 60] par :

$$g(x) = 6x.$$

d) Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

e) Déduisez-en à partir de quel nombre d'appareils l'entreprise produirait et vendrait à perte.

f) Retrouvez ce résultat par le calcul.

Avec des taux d'évolution...

Dans un magasin de jouets, le directeur effectue son bilan mensuel. Au mois d'octobre, son chiffre d'affaires est de 20 000 €.

1 Au cours du mois de novembre, le chiffre d'affaires est en hausse de x % .
Au mois de décembre, en raison des fêtes de Noël, il améliore la hausse du mois de novembre de 10 points de pourcentage d'évolution.

a. Montrer que le chiffre d'affaires au mois de décembre est : $D(x) = 2x^2 + 420\,x + 22\,000$.

b. Le chiffre d'affaires du mois de décembre est 31 200 €. Déterminer la valeur de x .

2 Si les chiffres d'affaires avaient subi une même augmentation de t % au cours des mois de novembre et de décembre, justifier que t vérifie l'équation :

$$2t^2 + 400t + 20\,000 = 31\,200 .$$

Puis déterminer une valeur approchée de t, à 10^{-3} près.

Un capital de 20 000 € est placé au taux de t % pendant un an ; l'intérêt est capitalisé et le nouveau capital est placé l'année suivante au taux de $(t - 1)$ %.
L'intérêt versé la seconde année est 1 512 €.

1. Expliquez pourquoi t est une solution de l'équation :

$$2(100 + t)(t - 1) = 1\,512.$$

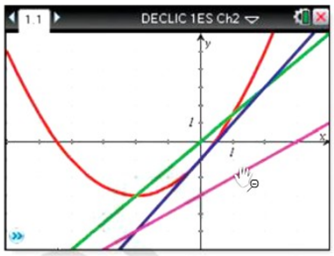
2. Calculez le taux t.

Positions relatives...

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = 0{,}5x^2 + 2x - 1$.
Soit $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ les droites d'équations respectives :

$$y = 1{,}5x , \quad y = 2x - 1 \quad \text{et} \quad y = x - 3 .$$

1 On a tracé ces courbes à l'aide d'une calculatrice.



Après avoir repéré chacune des courbes, lire graphiquement les positions relatives de $\mathscr{P}$ avec chaque droite.

2 Résoudre l'inéquation $0{,}5x^2 + 2x - 1 \geqslant 1{,}5x$.
En déduire les positions relatives de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}_1$.
Comparer avec les résultats de la question **1** .

3 Étudier algébriquement les positions relatives de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}_2$, puis de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}_3$.
Comparer avec les résultats de la question **1** .

V. Algorithme Algobox résolution équation du second degré

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
delta EST_DU_TYPE NOMBRE
x0 EST_DU_TYPE NOMBRE
x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
AFFICHER "Resolution d'une equation du second degre"
AFFICHER "entrez les coefficients du trinome du second degre"
LIRE a
LIRE b
LIRE c
SI (a==0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "Ceci n'est pas un trinome du second degre"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
delta PREND_LA_VALEUR pow(b,2)-4*a*c
AFFICHER "delta="
AFFICHER delta
SI (delta<0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "L'equation n'admet pas de solution"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
SI (delta==0) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "L'equation admet une solution"
x0 PREND_LA_VALEUR -b/(2*a)
AFFICHER "x0="
AFFICHER x0
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "l'equation admet deux solutions"
x1 PREND_LA_VALEUR (-b-sqrt(delta))/(2*a)
x2 PREND_LA_VALEUR (-b+sqrt(delta))/(2*a)
AFFICHER "x1="
AFFICHER x1
AFFICHER "x2="
AFFICHER x2
FIN_SINON
FIN_SINON
FIN_SINON

FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=a*x^2+b*x+c
```

Liste d'exercices :
Inéquations : 75, 76 p 49
Bénéfices : 95 p 53 ; 107 p 59
Architect : 104 p 57
Pos. Relative : 90 p 52