Chapitre 7
Inéquations

Classe de seconde

Inéquations

I. Inégalités et inéquations
Exercices vérifier les acquis p 116

1) Principe général
Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant l'inégalité donnée. L'ensemble des solutions S se présente en général sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Pour déterminer si les bornes de S sont ouvertes ou fermées on applique la règle suivante :
Les bornes sont ouvertes si l'inégalité formant l'inéquation est **stricte**, si la borne correspond à un **infini** ou à une **double barre**. Dans tous les autres cas, les bornes sont fermées.

2) Rappel sur les inégalités

Si on multiplie (ou on divise) une inégalité par un nombre strictement négatif, on change le sens de cette inégalité.

Exemple :
Résolution de $3-2x>4$:

$$3-2x>4$$
$$-2x>4-3$$
$$-2x>1$$
$$x<-\frac{1}{2}$$

Donc, $S=\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$. Les bornes sont ouvertes car l'inégalité est stricte.

II. Signe de ax + b (signe d'une fonction affine du chapitre 4)

Trouver le signe de $ax+b$, c'est trouver les valeurs de x telles que $ax+b>0$ et telles que $ax+b<0$.

Étude du signe de $-2x+3$:

Méthode 1 :

On cherche la valeur qui qui annule $-2x+3$:
$-2x+3=0 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

On complète le tableau en utilisant la règle : « signe de a après le 0 ».

Méthode 2 :

On résout l'inéquation $-2x+3<0$:
$-2x+3<0 \Leftrightarrow -2x<-3 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$.

de même $-2x+3>0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$

On regroupe ces résultats dans le tableau de signe.

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$	

III. Signe d'un produit, d'un quotient, résolution d'inéquations

Règle des signes :

Le produit ou le quotient de deux réels de **même signe** est **positif**.
Le produit ou le quotient de deux réels de **signes contraires** est **négatif**.

EXEMPLE 1 : Étude du signe du produit $(x+5)(-x+3)$ dans un tableau

(1) On résout chaque équation $x+5=0$ et $-x+3=0$ et on inscrit les solutions par ordre croissant.

(2) On applique la règle du signe de $ax+b$.

(3) On applique la règle des signes.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+5)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-$ par $+$ donne $-$

$+$ par $+$ donne $+$

Sur la dernière et la première lignes du tableau, on lit que :

- $(x+5)(-x+3)$ est négatif ou nul pour $x \leqslant -5$ **ou** $x \geqslant 3$;
- $(x+5)(-x+3)$ est positif ou nul pour $-5 \leqslant x \leqslant 3$.

EXEMPLE 2 : Étude du signe du quotient $\dfrac{x+5}{-x+3}$ dans un tableau

On procède comme à l'exemple précédent, mais, sur la dernière ligne, on indique que le dénominateur du quotient doit être **différent de 0,** donc ici $x \neq 3$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+5}{-x+3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

La double barre indique que 3 est une « valeur interdite ».

Sur la dernière et la première lignes du tableau, on lit que :

- $\dfrac{x+5}{-x+3}$ est négatif ou nul pour $x \leqslant -5$ **ou** $x > 3$.
- $\dfrac{x+5}{-x+3}$ est positif ou nul pour $-5 \leqslant x < 3$.

Méthode générale de résolution d'une inéquation :

- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Réduire le premier membre sous le même dénominateur (si besoin)
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre (Attention : il faut ajouter une double barre dans la dernière ligne pour toutes les valeurs de x qui annulent le dénominateur).
- Ecrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

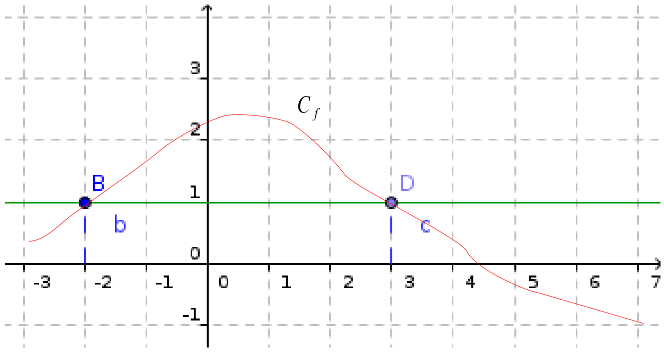
Exemples :

Résolution des inéquations suivantes :

a) $(-2x+3)(5x+1) < 0$ b) $\dfrac{(-2x+3)}{(5x+1)} > 0$ c) $\dfrac{(1-x)}{x} \leqslant 2$

IV. Résolutions graphiques d'inéquations

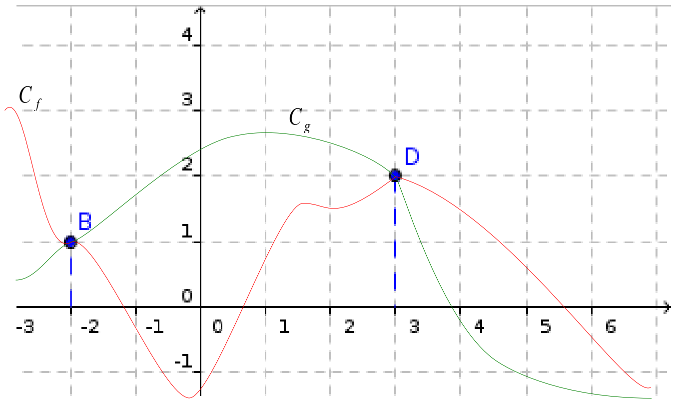
1) Inéquation $f(x) > k$ (ou $f(x) < k$ ...)



Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$ revient à chercher **<u>les abscisses des points</u>** de la courbe C_f situés strictement « en dessous » de la droite d'équation $y = 1$.

$$S = [-3\,;-2[\cup]3\,;7]$$

2) $f(x) > g(x)$



Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à chercher **<u>les abscisses des points</u>** de la courbe C_f situés strictement « au dessus » des points de la courbe C_g.

$$S = [-3\,;-2[\cup]3\,;7]$$

Exercices :
36 p 123
38 p 123, 39 p 123
42 p 123